ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1

Пример 1. Даны матрицы A и B. E - единичная матрица. Найти:
а) матрицу $(A-2E)\cdot B$; б) обратную матрицу A^{-1} и проверить, что $A^{-1}\cdot A=E$:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Решение. а). Раскроем скобки, получим

$$(A-2E)\cdot B=A\cdot B-2E\cdot B=A\cdot B-2B.$$

Применяя правило умножения матрицы на матрицу, имеем

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot 0\\ 2\cdot 2+3\cdot 0+1\cdot 0\\ 3\cdot 2+5\cdot 0+2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$(A-2E)\cdot B=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\\ 6\end{pmatrix}.$$

б). Обратную матрицу A^{-1} найдем, используя присоединенную матрицу A^{+}. Элементы присоединенной матрицы - это алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, расположенные по столбцам:

$$A^{+}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица определяется формулой:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{+}.$$

Вычислим определитель матрицы, проверим, что матрица невырожденная, следовательно, имеет обратную матрицу. Определитель найдем, раскрывая по элементам первой строки:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&1\\3&5&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=1-2\cdot(4-3)+3\cdot(10-9)=2\neq 0\,.$$

Находим алгебраические дополнения элементов исходной матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&1\\5&2\end{vmatrix}=3\cdot 2-5\cdot 1=1;\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=-(4-3)=-1;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&3\\3&5\end{vmatrix}=10-9=1;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}2&3\\5&2\end{vmatrix}=11;\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1&3\\3&2\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}2&3\\3&1\end{vmatrix}=-7;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5;\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}=-1.$$

Итак, присоединенная матрица имеет вид:

$$A^{+}=\begin{pmatrix}1&11&-7\\-1&-7&5\\1&1&-1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, обратная матрица равна

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&11&-7\\-1&-7&5\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&11/2&-7/2\\-1/2&-7/2&5/2\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}.$$

Проверим, что обратная матрица найдена правильно, должно выполняться условие $A^{-1}\cdot A=E$. Вычислим элементы произведения матриц:

$$e_{11}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{11}{2}\cdot 2+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 3=\frac{23-21}{2}=1$$ - верно,

$$e_{21}=-\frac{1}{2}\cdot 1+\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot 2+\frac{5}{2}\cdot 3=\frac{-1-14+15}{2}=0$$ - верно,

$$e_{31}=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 2+\left(-\frac{1}{2}\cdot 3\right)=0$$ - верно.

Пример 2. Тремя методами (Крамера, матричным методом и методом Гаусса) решить систему линейных алгебраических уравнений: $A\cdot X=B$, где матрицы A и B заданы в условии задачи 1, а X - матрица-столбец неизвестных $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Решение. Учитывая правило перемножения матриц, запишем подробный вид системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Получим решение по формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$. Здесь $\Delta = \det A = 2$ - определитель матрицы системы, он найден в задаче 1 при нахождении обратной матрицы. $\Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3$ - определители, полученные из определителя матрицы системы заменой соответственно первого, второго, третьего столбца матрицы столбцом правых частей:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 2.$$

Таким образом, получаем,

$$x_1 = \frac{2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{2} = -1, \quad x_3 = \frac{2}{2} = 1.$$

Получим решение матричным методом. В этом случае решение определяется формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Обратная матрица была найдена при решении задачи 1. Поэтому сразу запишем

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 11/2 & -7/2 \\ -1/2 & -7/2 & 5/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \cdot 2 + 11/2 \cdot 0 - 7/2 \cdot 0 \\ -1/2 \cdot 2 - 7/2 \cdot 0 + 5/2 \cdot 0 \\ 1/2 \cdot 2 + 1/2 \cdot 0 - 1/2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая соответствующие элементы матриц слева и справа, снова находим

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 1.$$

Получим решение методом Гаусса. При помощи элементарных преобразований строк расширенной матрицы $\left(A|B\right)$ последовательно исключаем неизвестные в уравнениях системы. На месте клетки A получим единичную матрицу E, при этом на месте клетки B появится вектор решения.

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & 2 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 0\\ 3 & 5 & 2 & 0\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}2c-2\times 1c\\ 3c-3\times 1c\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & -1 & -5 & -4\\ 0 & -1 & -7 & -6\end{array}\right)\sim 2c\times(-1)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & \boxed{1} & 5 & 4\\ 0 & -1 & -7 & -6\end{array}\right)\sim$$

$$\begin{array}{c}1c-2\times 2c\\ 3c+2c\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -7 & -6\\ 0 & 1 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -2 & -2\end{array}\right)\sim 3c:(-2)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -7 & -6\\ 0 & 1 & 5 & 4\\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}2c-5\times 3c\\ 1c+7\times 3c\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right)=$$

$\left(E|X\right)$. Итак, $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$.

Пример 3. Даны точки

$A(1;0;-1),\quad B(2;2;-3),\quad C(3;1;1),\quad D(4;-3;5)$. Найти:

а). Координаты, модуль и направляющие косинусы вектора $\overline{AB}$;

б). Проекцию вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{CD}$;

в). Скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, а также угол между ними;

г). Векторное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, а также площадь треугольника $\triangle ABC$;

д). Смешанное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, а также объем пирамиды *ABCD*.

Решение. а) Вектор $\overline{AB}$ найдем по формуле $\overline{AB}=\left\{x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right\}$:

$\overline{AB}=\left\{2-1;2-0;-3-(-1)\right\}=\left\{1;2;-2\right\}$. Модуль вектора $\mathbf{a}=\left\{a_1,a_2,a_3\right\}$ определяется соотношением $|\mathbf{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$. Получаем отсюда $\left|\overline{AB}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}=3$. Направляющие косинусы – это координаты орта вектора $\overline{AB}$. Т.е. вектора $\overline{AB}^0 = \frac{\overline{AB}}{\left|\overline{AB}\right|} = \frac{\{1;2;-2\}}{3} = \left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right\}$. Направляющие косинусы равны: $\cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

б). Проекцию вектора вычислим с помощью скалярного произведения:

$$np_{\overline{CD}}\overline{AB} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{CD}\right|}.$$

Найдем вектор $\overline{CD} = \{1;-4;4\}$. Учитывая формулу вычисления скалярного произведения векторов в координатах

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

найдем проекцию

$$np_{\overline{CD}}\overline{AB} = \frac{1\cdot 1 + 2\cdot(-4) + (-2)\cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{-15}{\sqrt{33}}.$$

в). Найдем вектор $\overline{BC}$ и вычислим скалярное произведение векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. $\overline{BC} = \{1;-1;4\}$.

$\overline{AB}\cdot\overline{BC} = \{1;2;-2\}\cdot\{1;-1;4\} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) + (-2)\cdot 4 = -9$.

Косинус угла φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{BC}\right|} = \frac{-9}{3\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда заключаем, что угол $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

Найдем вектор $\overline{AC}$ и вычислим векторное произведение векторов с помощью формулы

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

$\overline{AC} = \{2;1;2\}$. $\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + (-3)\mathbf{k} = \{6;6;-3\}$. Учитывая, что модуль векторного произведения – площадь параллелограмма, для площади треугольника имеем соотношение

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\{6;6;-3\}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} = \frac{9}{2}.$$

д). Найдем вектор $\overline{AD}$ и вычислим смешанное произведение по формуле

$$(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Имеем $\overline{AD} = \{3;-3;6\}$. $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 18$.

Учитывая, что модуль смешанного произведения численно равен объему параллелепипеда, построенного па векторах-сомножителях, а объем пирамиды составляет шестую часть объема параллелепипеда, получаем

$$V_{пир} = \frac{18}{6} = 3.$$

Пример 4. . На плоскости даны вершины треугольника $\triangle ABC$. Найти:

а). Канонические уравнения сторон AB и AC;

б). Уравнение высоты, опущенной из вершины B;

в). Внутренний угол $\angle A$;

г). Уравнение медианы, проведенной из вершины B;

д). Расстояние от точки B до стороны AC. Сделать чертеж:

$A(1;0)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.

Решение. а). Уравнения сторон найдем, используя уравнение прямой, проходящей через две заданные точки: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$.

$AB: \frac{y-0}{2-0} = \frac{x-1}{2-1}, \quad y = 2x-2. \qquad AC: \frac{y-0}{1-0} = \frac{x-1}{3-1}, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Угловой коэффициент прямой AC равен $k_{AC} = \frac{1}{2}$.

б). Угловой коэффициент высоты BH связан с угловым коэффициентом стороны AC соотношением $k_{AC} \cdot k_{BH} = -1$. Отсюда находим, $k_{BH} = -2$. Уравнение высоты составим, используя уравнение прямой, имеющей заданный наклон и проходящей через заданную точку: $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$.

$BH: y - 2 = -2\left(x-2\right), \quad y = -2x + 6$.

в). Для нахождения внутреннего угла $\angle A$ используем формулу

$$tg\angle A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}}.$$

Получаем, $tg\angle A = \frac{2 - 1/2}{1 + 2 \cdot 1/2} = \frac{3}{4}. \quad \angle A = arctg\frac{3}{4}$.

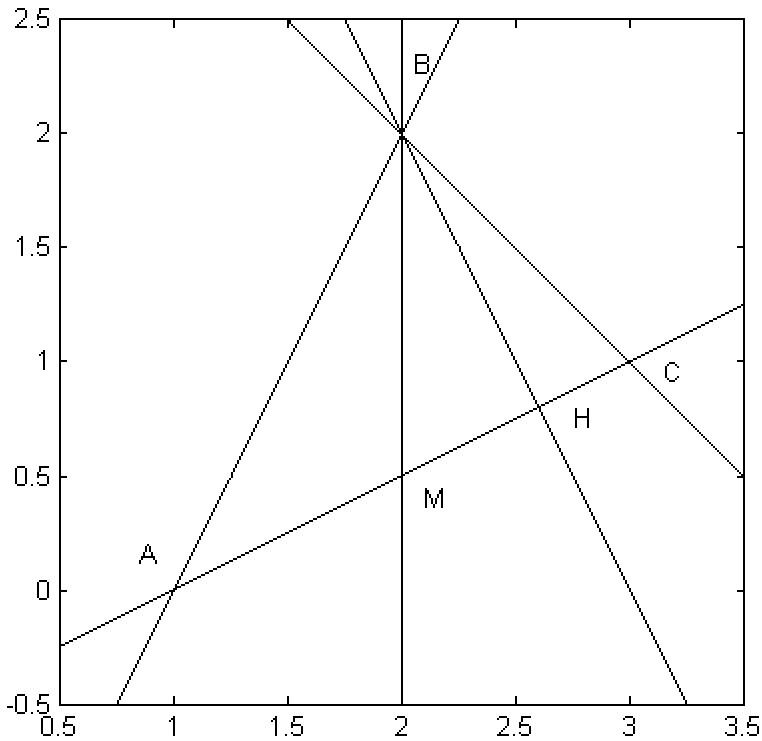
г). Чтобы составить уравнение медианы, найдем координаты точки M - середины стороны AC:

$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

$BM: \frac{y-2}{1/2 - 2} = \frac{x-2}{2-2}, \quad x = 2$ (каноническое уравнение вертикальной прямой).

д). Расстояние от вершины B до стороны AC найдем по формуле: $d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где $Ax + By + C = 0$ - общее уравнение прямой, $\left(x_0; y_0\right)$ - точка, от которой определяется расстояние. Общее уравнение стороны AC имеет вид: $x - 2y - 1 = 0$. Поэтому $d = \frac{\left|2 - 2 \cdot 2 - 1\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-2\right)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Строим треугольник в координатных осях:



Пример 5. Точки $A(1;2;3)$, $B(3;0;2)$, $C(6;3;-1)$, $D(4;1;5)$ являются вершинами пирамиды. Найти:

а). Уравнения ребра AB;

б). Угол между ребрами AB и AC;

в). Уравнение грани ABC;

г). Угол между ребром AD и гранью ABC;

д). Уравнение высоты пирамиды, опущенной из вершины D, а также проекцию этой вершины на плоскость ABC.

Решение. а). Канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки, определяются соотношениями

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Следовательно, уравнения ребра AB имеют вид

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{0-2}=\frac{z-3}{2-3}, \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{-1}.$$

б). Угол между ребрами - это угол φ между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Эти векторы соответственно равны $\overline{AB}=\{2;-2;-1\}$ и $\overline{AC}=\{5;1;-4\}$. Поэтому

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\left|\overline{AC}\right|} = \frac{2\cdot 5+(-2)\cdot 1+(-1)\cdot(-4)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}\sqrt{5^2+1^2+(-4)^2}} = \frac{4}{\sqrt{42}}.$$

в). Составим уравнение грани ABC, используя условие компланарности векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и текущего вектора $\overline{AM} = \{x-1; y-2; z-3\}$:

$$\left(\overline{AM}, \overline{AB}, \overline{AC}\right) = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & -1 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получим

$$(x-1)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \text{или}$$

$$3x + y + 4z - 17 = 0.$$

г). Угол α между прямой с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и плоскостью с нормальным вектором $\mathbf{N}$ определяется формулой

$$\sin\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{a}||\mathbf{N}|}.$$

Направляющий вектор ребра равен $\mathbf{a} = \overline{AD} = \{3; -1; 2\}$, координаты нормального вектора плоскости – это коэффициенты в общем уравнении плоскости, т.е. $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Отсюда получаем

$$\sin\alpha = \frac{3\cdot 3+(-1)\cdot 1+2\cdot 4}{\sqrt{3^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{91}}, \qquad \alpha = \arcsin\frac{8}{\sqrt{91}}.$$

д). Направляющим вектором высоты пирамиды, опущенной из вершины D, является нормальный вектор плоскости $\mathbf{N} = \{3; 1; 4\}$. Поэтому канонические уравнения высоты следующие

$$\frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{4}.$$

Проекцию P вершины D на плоскость основания найдем как пересечение прямой DP и плоскости ABC. Для этого от канонических уравнений высоты перейдем к параметрическим уравнениям:

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-5}{4}=t, \quad x=3t+4, \quad y=t+1, \quad z=4t+5$$

Подставляя последние соотношения в уравнение плоскости ABC, получаем уравнение для определения значения параметра t, соответствующего точке P:

$$3(3t+4)t+1+4(4t+5)-17=0, \quad t=-\frac{8}{13}.$$

Подставляя полученное значение t в параметрические уравнения высоты, находим координаты точки P:

$$x=3\left(-\frac{8}{13}\right)+4=\frac{28}{13}, \quad y=-\frac{8}{13}+1=\frac{5}{13}, \quad z=4\left(-\frac{8}{13}\right)+5=\frac{33}{13}.$$

Пример 6. Найти пределы функций: а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x$

Решение.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3x-1)(4x+1)}{x^2+2x+\sqrt{x}+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ *Чтобы раскрыть неопределенность типа* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ *необходимо и в числителе и в знаменателе в каждом из сомножителей вынести старшие степени* =

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(3-\frac{1}{x}\right)\cancel{x}\left(4+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{(3-0)(4+0)}{(1+0+0+0)}=12;$$

б)

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x-8}-1}{x^2-81}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 9}\frac{\left(\sqrt{x-8}-1\right)\left(\sqrt{x-8}+1\right)}{\left(\sqrt{x-8}+1\right)(x-9)(x+9)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-8-1}{\left(\sqrt{9-8}+1\right)(x-9)(9+9)}=\frac{1}{36}$$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x2\sin x\cos x}{2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cos 0}{\sin x}=1;$

Здесь использован первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

г)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-3}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-3}}\right]^{\frac{-3}{3x+2}x}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(3+\frac{2}{x}\right)}}=\frac{1}{e}$$

Здесь применен второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

Пример 7. Используя определение, найти производную функции $y=x^2+3x$ в точке $x_0=1$.

Решение.

По определению $y'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}$.

$y(x_0)=y(1)=1^2+3\cdot 1=4,\qquad y(x_0+\Delta x)=y(1+\Delta x)=(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)=4+5\Delta x+\Delta x^2$

Отсюда

$$y'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x_0+\Delta x)-y(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+5\Delta x+\Delta x^2-4}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cancel{\Delta x}(5+\Delta x)}{\cancel{\Delta x}}=5.$$

Для решения примеров **задания 8** предполагается использование правил дифференцирования и таблицы производных основных элементарных функций:

Правила дифференцирования

1. $c'=0, \qquad c-const$
2. $(ku)'=ku', \qquad k-const$
3. $(u+v)'=u'+v'$ - производная суммы
4. $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ - производная произведения
5. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ - производная дроби
6. Производная сложной функции:

$$\left[y(u(x))\right]' = y_u{}' \cdot u_x{}'$$

(вначале производная внешней функции по промежуточному аргументу)

Таблица производных

$x' = 1$ (1) $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1} \ u'$

(2)

$(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \ u'$ (3) $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \ u'$

(4)

$\left(e^u\right)' = e^u \ u'$ (5) $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \ u'$

(6)

$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \ u'$ (7) $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \ u'$

(8)

$(\sin u)' = \cos u \ u'$ (9) $(\cos u)' = -\sin u \ u'$

(10)

$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \ u'$ (11) $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \ u'$

(12) $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ u'$ (13)

$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ u'$ (14)

$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \ u'$ (15) $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \ u'$

(16)

Особое внимание следует обратить на правило 6 для производных сложных функций. В примере 8в) необходимо вычислить производную **неявной** функции, а в примере 8г) - производную функции, заданной **параметрически.**

(Можно использовать формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$).

Таблица основных интегралов

1. $\int 0du = C; \quad C = \text{const};$

2. $\int du = u + C;$

3. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1;$

3а. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C;$

4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$

5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

6. $\int e^u du = e^u + C;$

7. $\int \cos u\, du = \sin u + C;$

8. $\int \sin u\, du = -\cos u + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

11. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C;$

12. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

13. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + C;$

14. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + C;$

15. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \dfrac{u}{2}\right| + C;$

16. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

17. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + C;$

18. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$

Пример 1. Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{3x^3+1}{x^4} + 2\sqrt[6]{x^5}\right)dx; \qquad \acute{a})\int\left(\frac{5}{11x^2+2} + 3\cdot 5^x + \frac{16-x^2}{4+x}\right)dx.$$

Решение.

$$a)\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\right)dx=\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}\right)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{используем свойства 3 и 4 и разобьем интеграл от суммы}\\ \text{функции на сумму интегралов, при этом постоянные}\\ \text{множители вынесем за знак интегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+7}}-3\int\frac{dx}{x}-\int x^{-4}dx+2\int x^{5/6}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{используем табличные}\\ \text{интегралы 12, 4, 3}\end{array}\right\}=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|-\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+2\cdot\frac{x^{5/6+1}}{5/6+1}+C=$$

$$=5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C.$$

Проверка:

$$\left(5\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|-3\ln|x|+\frac{1}{3x^3}+\frac{12}{11}x^{11/6}+C\right)'=5\left(\ln\left|x+\sqrt{x^2+7}\right|\right)'-$$

$$-3\left(\ln|x|\right)'+\frac{1}{3}\left(x^{-3}\right)'+\frac{12}{11}\left(x^{11/6}\right)'+C'=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{4, 3, 1 таблицы производных}\end{matrix}\right\}=$$

$$=5\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)'}{x+\sqrt{x^2+7}}-3\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}(-3)x^{-3-1}+\frac{12}{11}\cdot\frac{11}{6}\cdot x^{11/6-1}=5\cdot\frac{1+\dfrac{\left(x^2+7\right)'}{2\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^4}+2x^{5/6}=5\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+7}}}{x+\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=5\frac{\sqrt{x^2+7}+x}{\left(x+\sqrt{x^2+7}\right)\sqrt{x^2+7}}-$$

$$-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}=\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-\frac{3x^3+1}{x^4}+2\sqrt[6]{x^5}\text{ — верно.}$$

б) $$\int\left(\frac{5}{11x^2+2}+3\cdot5^x+\frac{16-x^2}{4+x}\right)dx=5\int\frac{dx}{11\left(x^2+\dfrac{2}{11}\right)}+3\int5^x dx+$$

$$+\int\frac{(4-x)(4+x)}{4+x}dx=\frac{5}{11}\int\frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{\dfrac{2}{11}}\right)^2}+3\int5^x dx+4\int dx-\int x\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем формулы}\\ \text{13, 5, 2, 3 таблицы интегралов}\end{matrix}\right\}=\frac{5}{11}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{11}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{\dfrac{2}{11}}}+3\cdot\frac{5^x}{\ln5}+$$

$$+4x-\frac{x^{1+1}}{1+1}+C=\frac{5}{\sqrt{22}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{11}{2}}x+3\frac{5^x}{\ln5}+4x-\frac{x^2}{2}+C.$$

2.2. Метод замены переменной

Теорема 1. Пусть $x=\varphi(t)$ монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (1)$$

При этом, если $\int f(\varphi(t)\varphi'(t))\,dt=F(t)+C,$ то $\int f(x)dx=F(\psi(x))+C,$ где $\psi(x)$ — функция, обратная $\varphi(t)$.

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

Алгоритм замены переменной:

1) Связать старую переменную интегрирования x с новой переменной t с помощью замены $x=\varphi(t)$.

2) Найти связь между дифференциалами $dx=\varphi'(t)dt$.

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив $t=\psi(x)$.

Среди интегралов, вычисляемых с помощью замены переменной, выделим интегралы вида:

$$\int\frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}dx \quad \text{и} \quad \int\frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$$

При их вычислении необходимо выделить в знаменателе полный квадрат, для чего используется стандартная замена:

$$x=t-\frac{b}{2a},\ dx=dt,\ t=x+\frac{b}{2a}. \qquad (2)$$

Пример 2. Проинтегрировать подходящей заменой переменной (подведение под знак дифференциала).

$$а)\ \int\cos 4x dx;\ \ б)\ \int e^{9x+1}dx;\ \ в)\int x(2-x^2)^5dx;\ \ г)\ \int\frac{x-2}{x^2+6x+10}dx.$$

Решение:

$$a)\ \int \cos 4x dx = \left| \begin{array}{c} t = 4x \\ dt = (4x)' = 4dx \\ dx = \dfrac{dt}{4} \end{array} \right| = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 7} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \sin t + C = \frac{1}{4} \sin 4x + C.$$

$$б)\ \int e^{9x+1} dx = \left| \begin{array}{c} t = 9x + 1 \\ dt = (9x+1)' = 9dx \\ dx = \dfrac{dt}{9} \end{array} \right| = \int e^t \frac{dt}{9} = \frac{1}{9} \int e^t dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 6} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{9} e^t + C = \frac{1}{9} e^{9x+1} + C.$$

$$в) \int x(2 - x^2)^5 dx = \left| \begin{array}{c} t = 2 - x^2 \\ dt = (2 - x^2)' = -2x dx \\ x dx = \dfrac{dt}{-2} \end{array} \right| = \int t^5 \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\frac{1}{2} \int t^5 dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{формула 3} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{t^6}{6} + C = -\frac{1}{12} (2 - x^2)^6 + C.$$

$$г)\ \int \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 10} dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Используем замену (2),} \\ \text{учтем, что } a = 1, \ b = 6 \end{array} \right\} = \left| \begin{array}{l} x = t - 3 \\ dx = dt \\ t = x + 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{t - 3 - 2}{(t-3)^2 + 6(t-3) + 10} dt = \int \frac{t - 5}{t^2 - 6t + 9 + 6t - 18 + 10} dt = \int \frac{t - 5}{t^2 + 1} dt = \int \frac{t dt}{t^2 + 1} -$$

$$-5 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \left| \begin{array}{l} \text{для 1-го интеграла} \\ z = t^2 + 1 \\ dz = 2t dt; \ t dt = \dfrac{dz}{2} \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z} - 5 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \left\{ \begin{array}{l} \text{формулы 4, 13} \\ \text{таблицы} \\ \text{интегралов} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \ln |z| -$$

$$-5 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln \left| t^2 + 1 \right| - 5 \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \ln \left| x^2 + 6x + 10 \right| - 5 \operatorname{arctg}(x + 3) + C.$$

2.3. Интегрирование по частям. Некоторые виды интегралов, вычисляемых по частям

Если производные функций $U=U(x)$ и $V=V(x)$ непрерывны, то справедлива формула:

$$\int UdV = UV - \int VdU, \qquad (3)$$

называемая *формулой интегрирования по частям.*

В качестве $U(x)$ обычно выбирают функцию, которая упрощается при дифференцировании.

Некоторые стандартные случаи функций, интегрируемых по частям, указаны в таблице 1. Там же дается способ выбора множителей U и dV.

Таблица 1

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int P_n(x)\sin kx\,dx$ $\int P_n(x)\cos kx\,dx$ $\int P_n(x)e^{kx}\,dx$ $n=1,2,\ldots$	$U=P_n(x)\to$ $\to dU=P_n'(x)dx$	$dV=\sin kx\,dx \to V=-\frac{1}{k}\cos kx$ $dV=\cos kx\,dx \to V=\frac{1}{k}\sin kx$ $dV=e^{kx}dx \to V=\frac{1}{k}e^{kx}$

Вид интеграла	$U \to dU$	$dV \to V$
$\int \ln kx\,P_n(x)dx$	$U=\ln kx \to dU=\frac{dx}{x}$	$dV=P_n(x)dx\to$ $\to V=\int P_n(x)dx$
$\int \arcsin kx\,P_n(x)dx$	$U=\arcsin kx \to dU=\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \arccos kx\,P_n(x)dx$	$U=\arccos kx \to dU=-\frac{kdx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$	
$\int \operatorname{arctg} kx\,P_n(x)dx$	$U=\operatorname{arctg} kx \to dU=\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	
$\int \operatorname{arcctg} kx\,P_n(x)dx$	$U=\operatorname{arcctg} kx \to dU=-\frac{kdx}{1+k^2x^2}$	

$n=0,1,2,...$	

$P_n(x)$ — многочлен от x степени n, т. е. $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, где $a_0\neq 0$.

Пример 3. Проинтегрировать по частям.

$a)\ \int(3x-1)\sin 2xdx;$ $\qquad$ $б)\ \int(1+2x)\ln xdx.$

Решение.

$$\grave{a})\ \int(3x-1)\sin 2xdx=\left|\begin{array}{l} U=3x-1\to dU=3dx \\ dV=\sin 2xdx\to V=-\dfrac{\cos 2x}{2}\end{array}\right|=(3x-1)(-\frac{\cos 2x}{2})+\int\frac{\cos 2x}{2}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{2}\int\cos 2xdx=-\frac{1}{2}(3x-1)\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x+C.$$

$$б)\ \int(1+2x)\ln xdx=\left|\begin{array}{l} U=\ln x\to dU=\dfrac{dx}{x} \\ dV=(1+2x)dx\to \\ V=\int(1+2x)dx=x+x^2\end{array}\right|=\ln x(x+x^2)-\int(x+x^2)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x(x+x^2)-\int(1+x)dx=\ln x(x+x^2)-x-\frac{x^2}{2}+C.$$

2.4. Интегрирование рациональных дробей

Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}, \tag{4}$$

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ многочлены от x степеней m и n соответственно.

Рациональная дробь (4) называется *правильной*, если $m<n$ и *неправильной*, если $m\geq n$.

Простейшими рациональными дробями называют правильные рациональные дроби четырех типов:

$$1)\frac{A}{x-a};\quad 2)\frac{A}{(x-a)^n};\quad 3)\frac{Mx+N}{x^2+px+q};\quad 4)\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где a, p, q, A, M, N — действительные числа, $n=2,3,...$

При этом предполагается, что квадратный трехчлен не имеет действительных корней.

Простейшей дроби 1-го и 2-го типов интегрируются заменой $t = x - a$, а 3-го типа — заменой (2). Интегрирование простейших дробей 4-го типа является громоздкими, и мы его рассматривать не будем.

Теорема 2. Всякую правильную рациональную дробь можно представить, и потом единственным образом, в виде суммы простейших дробей типов 1) — 4). При этом каждому множителю в знаменателе вида $(x-a)^n$ будет соответствовать группа из n слагаемых вида $\frac{A_1}{x-a}$, $\frac{A_2}{(x-a)^2}$, …, $\frac{A_n}{(x-a)^n}$, а каждому множителю в знаменателе вида $(x^2+px+q)^n$ — слагаемые $\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}$, $\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}$, … ,$\frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}$.

Постоянные $A_1, A_2, \ldots, M_1, M_2, \ldots,$ N_1, N_2, … называют *неопределенными коэффициентами* и находят по следующему алгоритму:

1) Сумму всех простейших дробей привести к общему знаменателю, который равен знаменателю дроби в левой части тождества.
2) Числитель получившейся дроби приравнять к числителю исходной дроби.
3) Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов в левой и правой частях полученного тождества.
4) Решить полученную систему уравнений, которая имеет единственное решение.

Теорема 3. Всякую неправильную рациональную дробь $Q_m(x)/P_n(x)$ $(m \geq n)$ можно разложить, и притом единственным образом, на сумму многочлена $W_{m-n}(x)$ (целая часть) и правильной рациональной дроби $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$($S_r(x)$— «остаток» от деления $Q_m(x)$ на $P_n(x)$):

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = W_{m-n}(x) + \frac{S_r(x)}{P_n(x)}.$$

Итак, алгоритм интегрирования рациональных дробей:

1) Если подынтегральная дробь неправильная, то из неё выделяют целую часть $W_{m-n}(x)$, которая интегрируется непосредственно, и правильную рациональную дробь $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$.

2) Правильную рациональную дробь $S_r(x)/P_n(x)$ $(r<n)$ раскладывают на сумму простейших дробей 1) — 4).

3) Простейшие дроби интегрируют по отдельности с помощью соответствующих замен переменных.

Пример 4. Найти интегралы от рациональных дробей.

а) $\int \frac{x^3}{x-1}dx$; б) $\int \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx.$

Решение.

а) Подынтегральная дробь неправильная, поэтому выделим целую часть путем деления многочлена на многочлен «углом»:

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2+x+1 \quad \text{— целая часть } W_2(x) \\ -\,x^2 & \\ \underline{x^2-x} & \\ -\,x & \\ \underline{x-1} & \\ 1 & \quad \text{— остаток } S_0(x) \end{array}$$

Итак, $\frac{x^3}{x-1}=x^2+x+1+\frac{1}{x-1}.$

Тогда

$$\int \frac{x^3}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx=\int x^2dx+\int xdx+\int dx+\int \frac{dx}{x-1}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{формулы} \quad 3,\ 2 \\ \text{таблицы} \quad \text{интегралов,} \\ \text{для} \quad \text{последнего} \quad \text{интеграла} \\ \text{замена} \quad t=x-1, \quad dt=dx \quad \text{и} \\ \text{формула} \quad 4\end{array}\right\}=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+\ln|x-1|+C.$$

б) Подынтегральная дробь правильная, знаменатель это дроби разложим на множители, а затем разложим дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{x^2+1}{x^2\left(x^2-2x+1\right)}=\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{\left(x-1\right)^2}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{приведем сумму}\\ \text{простейших дробей}\\ \text{к общему знаменателю}\end{array}\right\}=\frac{A_1^{\backslash x(x-1)^2}}{x}+\frac{A_2^{\backslash(x-1)^2}}{x^2}+\frac{A_3^{\backslash x^2(x-1)}}{x-1}+\frac{A_1^{\backslash x^2}}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x(x^2-2x+1)+A_2(x^2-2x+1)+A_3x^2(x-1)+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}.$$

Итак, получим

$$\frac{x^2+1}{x^2\left(x-1\right)^2}=\frac{A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2}{x^2(x-1)^2}.$$

Поскольку знаменатели исходной и полученной дробей одинаковы, то приравняем их числители и получим тождество

$$x^2+1=A_1x^3-2A_1x^2+A_1x+A_2x^2-2A_2x+A_2+A_3x^3-A_3x^2+A_4x^2.$$

Сгруппируем в правой части слагаемые с одинаковыми степенями, а затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях:

$$x^2+1\equiv x^3\left(A_1+A_3\right)+x^2\left(-2A_1+A_2-A_3+A_4\right)+x\left(A_1-2A_2\right)+A_2$$

$$\begin{array}{l|c}x^3 & 0=A_1+A_3,\\ x^2 & 1=-2A_1+A_2-A_3+A_4,\\ x^1 & 0=A_1-2A_2,\\ x^0 & 1=A_2.\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\Rightarrow\begin{array}{c}A_3=-A_1=-2,\\ A_4=1+2A_1-A_2+A_3,\\ A_1=2A_2=2,\\ A_2=1.\end{array}$$

Следовательно, разложение имеет вид:

$$\frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}.$$

Вернемся к вычислению интеграла:

$$\int \frac{x^2+1}{x^4-2x^3+x^2}dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-2}dx -$$

$$-2\int\frac{dx}{x-1}++2\int(x-1)^{-2}dx = \left\{\begin{array}{l}\text{формулы 4, 3 таблицы интегралов,}\\ \text{для } 3-\text{го и } 4-\text{го интегралов за-}\\ \text{мена } t=x-1,\ dt=dx \text{ и формулы}\\ \text{ 4, 3таблицы интегралов}\end{array}\right\} = 2\ln|x|+$$

$$+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}--2\ln|x-1|+2\frac{(x-1)^{-2+1}}{-2+1}+C = 2\ln|x|-\frac{1}{x}-2\ln|x-1|-\frac{2}{x-1}+C.$$

2.5. Интегрирование тригонометрических выражений

Рассмотрим некоторые из интегралов от тригонометрических функций. Виды интегралов и способы их вычисления приведем в таблице 2.

Таблица 2.

Вид интеграла	Метод интегрирования
$\int \cos^{2n-1} x \sin^{\alpha} x dx$, где $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.	Замена $t=\sin x$, $dt=\cos x dx$. Если $n=2, 3, \ldots$, то необходимо учитывать формулу $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$.
$\int \sin^{2n-1} x \cos^{\alpha} x dx$, где $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.	Замена $t=\cos x$, $dt=-\sin x dx$. Если $n=2, 3, \ldots$, то необходимо учитывать формулу $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$.
$\int \cos^{2n} x \sin^{2m} x dx$, где $n, m\in\mathbb{N}$.	Использовать формулы понижения степени: $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.
$\int \left\{\begin{array}{l}\cos mx \cos nx\\ \sin mx \sin nx\\ \sin mx \cos nx\end{array}\right\} dx$	Использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

	$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)\right),$ $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right),$ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin\left(\alpha-\beta\right)+\sin\left(\alpha+\beta\right)\right).$

Пример 5. Найти интегралы:

$a)\int\sqrt[3]{\sin x}\cos xdx;\quad б)\int\sin 3x\cos 7xdx;\quad в)\int\sin^2 11xdx.$

Решение.

$$a)\int\sqrt[3]{\sin x}\cos xdx=\left|\begin{array}{l}\cos x \text{ в нечётной}\\ \text{степени, замена}\\ t=\sin x,\ dt=\cos xdx\end{array}\right|=\int\sqrt[3]{t}dt=\int t^{\frac{1}{3}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{формула 3}\\ \text{таблицы ин-}\\ \text{тегралов}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}+C=\frac{3}{4}\sin^{\frac{4}{3}}x+C.$$

$$б)\int \sin 3x\cos 7x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{используем фор-}\\ \text{мулу} \sin\alpha\cos\beta\\ \text{из таблицы 2}\end{array}\right\} = \int \frac{1}{2}\left(\sin\left(3x-7x\right)+\sin\left(3x+7x\right)\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\sin\left(-4x\right)+\sin 10x\right)dx = \left\{\begin{array}{l}\text{учтем, что } \sin x \text{—}\\ \text{нечетная функция,}\\ \text{т.е. } \sin\left(-\alpha\right) = -\sin\alpha\end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\int \sin 4x dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \sin 10x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{после замены } u = 4x \text{ для первого}\\ \text{интеграла и } u = 10x \text{ для второго}\\ \text{используем формулу 8 таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\cos 4x\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{10}\cos 10x\right)+C = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{20}\cos 10x + C.$$

$$в)\int \sin^2 11x dx = \left\{\begin{array}{l}\text{используем формулу}\\ \text{понижения степени}\\ \text{для } \sin^2\alpha \text{ из таблицы 2}\end{array}\right\} = \int \frac{1}{2}\left(1-\cos 22x\right)dx = \frac{1}{2}\int dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 22x dx == \left\{\begin{array}{l}\text{формулы 2,7}\\ \text{таблицы}\\ \text{интегралов}\end{array}\right\} = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{22}\sin 22x + C = \frac{1}{2} - \frac{1}{44}\sin 22x + C.$$

2.Определенный интеграл, его вычисление и свойства

Определенный интеграл от функции $f\left(x\right)$, непрерывной на отрезке $\left[a,b\right]$, вычисляется по формуле:

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = F\left(x\right)\Big|_a^b = F\left(b\right)-F\left(a\right), \qquad (5)$$

где $F\left(x\right)$— первообразная для функции $f\left(x\right)$, т. е. $F'\left(x\right) = f\left(x\right)$.

Формула (5) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

Свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b f\left(x\right)dx = -\int_b^a f\left(x\right)dx;$ 2) $\int_a^a f\left(x\right)dx = 0;$

$$3)\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

$$4)\int_a^b \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

$$5)\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx,\ C - \text{const};$$

6) Если $f(x) \le g(x)$ для всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx;$

7) Если $m \le f(x) \le M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

При вычислении определенного интеграла для нахождения первообразной используют те же методы, что и для нахождения неопределенного интеграла, т. е. замену переменной, интегрирование по частям и т. д. Однако есть ряд особенностей. При замене переменной по формуле (1) необходимо в соответствии с заменой менять пределы интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dx, \tag{6}$$

где $\alpha = \psi(a),\ \beta = \psi(b),\ t = \psi(x)$ — обратная к $x = \varphi(t)$ функция.

Формула интегрирования по частям (3) приобретает вид:

$$\int_a^b UdV = UV\Big|_a^b - \int_a^b VdU, \tag{7}$$

Определенный интеграл широко используется в различных приложениях, например, при вычислении площадей плоских фигур, длин дуг плоских кривых, объемов тел вращения, площадей поверхностей вращения, работы переменной силы на отрезке, пути, пройденного за промежуток времемени, статических моментов и моментов инерции плоских дуг и фигур и т. д.

2.8. Площади плоских фигур

2.8.1. Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если плоская фигура (рис. 1) ограничена линиями $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, где $f_2(x) \ge f_1(x)$ для всех $x \in [a,b]$, и прямыми $x = a$, $x = b$, то ее площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \quad (8)$$

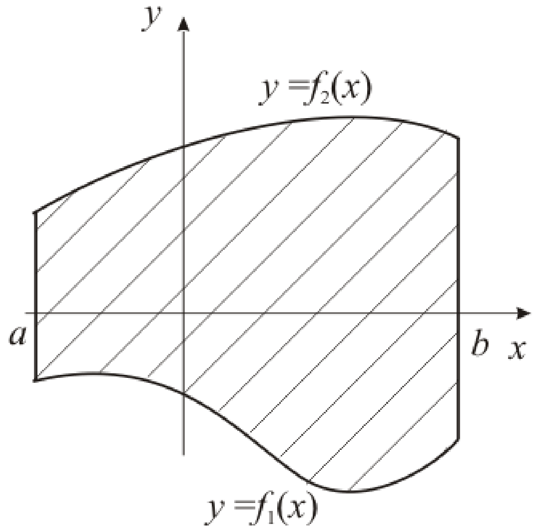


Рис. 1

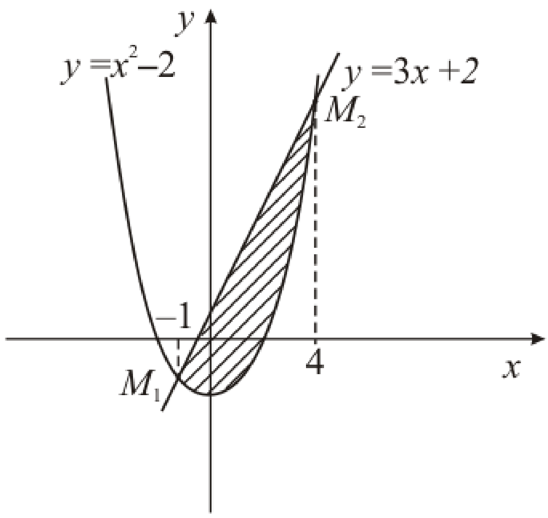


Рис. 2

Пример 7. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = x^2 - 2, \; y = 3x + 2.$$

Решение. Построим схематический рисунок (рис. 2). Для построения параболы возьмем несколько точек:

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	–2	–1	–1	2	2	7	7	14	14

Для построения прямой достаточно двух точек, например $(0, 2)$ и $(-1, -1)$.

Найдем координаты точек M_1 и M_2 пересечения параболы $y = x^2 - 2$ и прямой $y = 3x + 2$.

Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2, \\ y = 3x + 2. \end{cases} \Rightarrow x^2 - 2 = 3x + 2, \quad x^2 - 3x - 4 = 0, \quad x_1 = -1, \; x_2 = 4.$$

Тогда $y_1 = 3\cdot(-1)+2=-1$, $y_2 = 3\cdot 4+2=14$. Итак, $M_1(-1,-1)$, $M_2(4,14)$.

Площадь полученной фигуры найдем по формуле (8), в которой $f_2(x)=3x+2$, $f_1(x)=x^2-2$, поскольку $f_2(x)\ge f_1(x)$ для всех $x\in[-1,4]$. Получим:

$$S=\int_{-1}^{4}\left(3x+2-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{4}\left(3x-x^2+4\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+4x\right)\Bigg|_{-1}^{4}=$$

$$=\frac{3\cdot 4^2}{2}-\frac{4^3}{3}+4\cdot 4-\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-\frac{(-1)^3}{3}+4\cdot(-1)\right)=24-\frac{64}{3}+16-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+4=$$

$$=44-\frac{65}{3}-\frac{3}{2}=\frac{125}{6}=20\frac{5}{6}\ (\text{кв.ед.})$$

2. Вычисление объемов тел вращения

Если тело образовано вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью OX и прямыми $x=a$, $x=b$ (рис. 5), то его объем вычисляется по формуле:

$$V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2dx. \qquad (12)$$

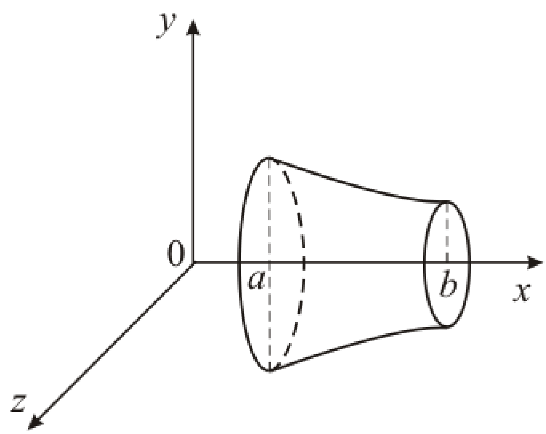


Рис. 5

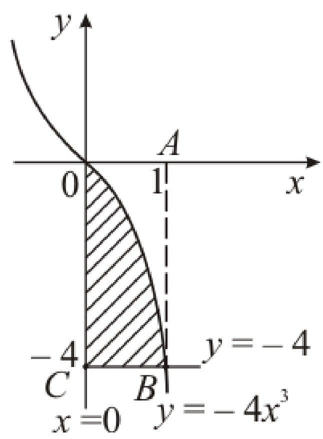


Рис. 6

Пример 10. Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями: $y=-4x^3$, $x=0$, $y=-4$.

Решение. Построим криволинейную трапецию, вращением которой получается тело вращения (рис. 6).

Чтобы получить объем тела вращения из объема V_1 тела, полученного вращением фигуры *OABC*, вычтем объем V_2 тела, полученного вращением фигуры *OAB*. Тогда искомый объем $V = V_1 - V_2$. По формуле (12) найдем V_1 и V_2: $V_1 = \pi\int_0^1 (-4)^2\, dx = \pi 16x\Big|_0^1 = 16\pi$ (ед. объема);

$$V_2 = \pi\int_0^1 \left(-4x^3\right)^2 dx = 16\pi\int_0^1 x^6 dx = 16\pi\frac{x^7}{7} = \frac{16\pi}{7} \text{ (ед. объема);}$$

$$V = V_1 - V_2 = 16\pi - \frac{16\pi}{7} = \frac{96}{7}\pi \approx 43{,}085 \text{ (ед. объема).}$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. Элементы комбинаторики *Размещением с повторениями* из n по m элементов называется конечная последовательность $\left(a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_m}\right)$ элементов некоторого множества $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Если все члены выборки различны, то последовательность называется *размещением без повторений. Размещения без повторения* - m-элементные выборки, различающиеся либо входящими элементами, либо порядком их следования. *Размещение с повторениями* – это выборка с возвращением выбираемых элементов. Число всех возможных *размещений с повторениями* равно n^m (число комбинаций, выбираемых из m групп, содержащих по n элементов). *Размещение без повторения* – выборка без возвращения выбираемых элементов . Общее число различных комбинаций – *размещений без повторений* обозначается символом A_n^m и равно $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$ (количество выборок из m групп, содержащих соответственно n, $(n-1)$, …, $(n-m+1)$ элементов).

Перестановками называются размещения из n по n элементов. Общее число перестановок обозначают символом P_n.

Сочетаниями из n по m элементов называются m- элементные подмножества множества $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, имеющие различный состав элементов. Два сочетания считаются различными, если хотя бы один элемент входит в одну комбинацию, но не входит в другую. Общее число различных сочетаний обозначают символом C_n^m.

Число размещений, перестановок и сочетаний определяются формулами:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad P_n = n!, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2. Классическое определение вероятности

$P(A)=\frac{m}{n}$, где n – общее число элементарных событий (исходов, которые в данном опыте образуют конечную полную группу равновозможных попарно несовместных событий), m – число элементарных событий, благоприятствующих наступлению события A.

3. Геометрическое определение вероятности

$P(A)=\frac{мера(A)}{мера(\Omega)}$. Вероятность попадания точки в какую либо часть A области Ω пропорциональна мере (длине, площади, объему и т.д.) этой части и не зависит от ее расположения и формы.

4. Основные свойства вероятности

Вероятность любого события A - число, заключенное между 0 и 1. Вероятность невозможного события равна 0. Вероятность достоверного события равна 1.

Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Для любых двух событий A и B имеет место формула (теорема сложения для произвольных событий):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Для полной группы несовместных событий $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$$

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)$$ - теорема умножения.

Если события A и B – независимые, то

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)$$ - теорема умножения.

5. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

Если известно, что событие A может произойти с одним из событий $H_1,\ H_2,\ \ldots,\ H_n$ (гипотез), образующих полную группу попарно несовместных событий, то вероятность события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)$$

Вероятности гипотез после того как имело место событие A переоценивают по формулам Байеса:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)\cdot P(A/H_i)},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

6. Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A одна и та же и равна p (вероятность «успеха»), то вероятность того, что в этих n испытаниях событие A наступит ровно k раз, выражается формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Число k_0 называется <u>наивероятнейшим числом</u> наступления события A в n испытаниях по схеме Бернулли, если значение $P_n(k)$ при $k = k_0$ не меньше остальных значений. Число k_0 можно найти из двойного неравенства:

$$np + p - 1 \le k_0 \le np + p .$$

7. <u>Предельные теоремы в схеме Бернулли</u>

Теорема 1 (Локальная теорема Лапласа). При больших n

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$$

Теорема 2 (Интегральная теорема Лапласа). При больших n вероятность того , что в серии испытаний событие A появится от k_1 до k_2 раз, выражается приближенной формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{где} \quad x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad q = 1-p ,$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$ - функция Лапласа.

Теорема 3 (Закон «редких» явлений Пуассона). При $n \gg 1$ и малых p, если среднее число успехов $\lambda = np, \quad \lambda - const$, имеет место приближенная формула

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} .$$

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО РАЗДЕЛУ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ»

Пример 1. В ящике находится 10 деталей. Из них 3 дефектные. Наудачу отобраны 3 детали. Какова вероятность того, что:

а) все детали дефектные *(событие A)*;

б) только одна деталь дефектная *(событие B)*;

в) все три детали годные *(событие C);*

г) хотя бы одна деталь дефектная *(событие D).*

Решение. Используем классическое определение вероятности.

а) *Событие A* = {выбранные три детали дефектные};

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

Элементарное событие в данной задаче - комбинация (сочетание) из трех деталей. $N = C_{10}^{3}$ - общее число способов выбрать 3 детали из имеющихся 10 деталей.

$M = 1$ (имеется всего один вариант выбора 3 дефектных деталей).

$$P(A) = \frac{1}{C_{10}^{3}} = \frac{1}{\dfrac{10!}{(10-3)!\cdot 3!}} = \frac{7!\cdot 3!}{10!} = \frac{1}{120}..$$

б) *Событие B* = {из трех выбранных деталей 1 деталь дефектная, две детали без дефекта};

$$P(B) = \frac{M}{N},$$

где $M = C_{3}^{1} \cdot C_{7}^{2}$ - количество вариантов, благоприятствующих появлению события B, при которых 1 дефектная деталь выбирается из группы 3 дефектных и 2 бездефектные детали выбираются из группы 7 бездефектных деталей $N = C_{10}^{3}$

Следовательно, $P(B) = \dfrac{C_{3}^{1} \cdot C_{7}^{2}}{C_{10}^{3}} = \dfrac{\dfrac{3!}{2!\cdot 1!} \cdot \dfrac{7!}{5!\cdot 2!}}{\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}} = \dfrac{7}{45}.$

в) *Событие C* = {выбранные три детали бездефектные}

$$P(C) = \frac{C_{7}^{3}}{C_{10}^{3}} = \frac{\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}}{\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}} = \frac{7}{24}.$$

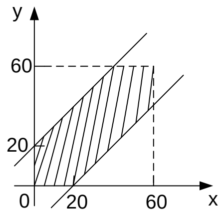
г) *Событие D* = {хотя бы одна из трех выбранных деталей бездефектная}. Рассмотрим противоположное событие $\bar{D}$.

$\bar{D} = C$ = { среди трех выбранных деталей нет дефектных}. Так как $P(D) = 1 - P(\bar{D})$, то $P(D) = 1 - P(C) = 1 - \dfrac{7}{24} = \dfrac{17}{24}.$

Пример 2. Два студента (Петров и Иванов) договорились о встрече в определенном месте между 12.00 и 13.00 часами. Пришедший первым до истечения часа ждет второго в течение 20 минут, после чего уходит.

Построить множество элементарных исходов Ω по описанию эксперимента и подмножество, соответствующее событию A = {встреча состоится}. Найти вероятность этого события.

Решение. Используем геометрическое определение вероятности. Наблюдаемый результат- пара координат (*x, y),* где *x* - время прихода Петрова, а *y* – время прихода Иванова. Время исчисляется в минутах, начиная с 12.00 часов



$\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 60, 0 \le x \le 60\}$. Точки (*x,y)* заполняют квадрат стороной 60. Встреча состоится, если $|y - x| < 20$ (пришедший первым ждет не более 20 минут). Неравенство с модулем заменим двойным неравенством

$$-20 \le y - x \le 20 \iff \begin{cases} y \le x + 20 \\ y \ge x - 20 \end{cases},$$

$$x - 20 \le y \le x + 20$$

Решения неравенства $y \le x + 20$ - это точки нижней полуплоскости, ограниченной прямой $y = x + 20$.

Совокупность решений неравенства $y \ge x - 20$ образует верхнюю полуплоскость с границей $y = x - 20$.

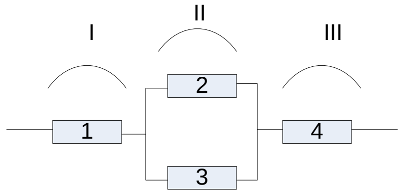
Решения системы неравенств – это точки области, полученной пересечением полуплоскостей. Т.к. $0 \le x \le 60$, $0 \le y \le 60$, то точки, когда состоится встреча, заполняют фигуру А (показана штриховкой). Используем геометрическое определение вероятности:

$$P(A) = \frac{пл.A}{пл.\Omega}.$$

Площадь фигуры $A = пл.\Omega - 2S_{\Delta} = 60^2 - 2 \cdot \frac{(60-20)^2}{2} = 3600 - 1600 = 2000.$ Здесь S_{Δ} - площадь не заштрихованных треугольников.

$$P(A)=\frac{2000}{3600}=\frac{5}{9}.$$

Пример 3. Электрическая цепь прибора составлена по схеме, приведенной на рисунке. Отказы элементов являются независимыми и совоку4пными событиями. Известна надежность p_k k- го элемента $p_1=p_2=0.7;\ p_3=0.8;\ p_4=0.9$. Найти вероятность надежности схемы P(A).



Решение. Разобьем схему на блоки, состоящие из последовательных соединений. Блок I состоит из элемента 1 .

Блок II состоит из параллельного соединения элементов 2 и 3.

Блок III – из элемента 4.

Вероятность того, что схема работает, равна $P(A)=P_I{\cdot}P_{II}{\cdot}P_{III}$.

P_I– вероятность того, что I блок исправен.

P_{II}- вероятность того, что II блок исправен.

P_{III} - вероятность того, что III блок исправен.

$P_I=p_1$

Вероятность того, что II блок исправен: $P_{II}=1-q_2q_3$

Вероятность того, что III блок исправен: $P_{III}=p_4$

Искомая вероятность что цепь сработает:

$$P(A)=p_1(1-q_2q_3)\,p_4=0,7\cdot(1-0,3\cdot0,2)\cdot0,9=0,5922.$$

Пример 4. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 игранных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекается ещё 2 мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

Решение. Рассмотрим предположения (гипотезы):

H_1={на первую игру выбирают два новых мяча}.

H_2={на первую игру выбирают один новый мяч, и один игранный}.

H_3={на первую игру выбирают два игранных мяча}.

Вероятности гипотез соответственно равны:

$$P(H_1)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{\dfrac{15!}{13!\cdot 2!}}{\dfrac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{21}{38},\ P(H_2)=\frac{C_{15}^1\cdot C_5^1}{C_{20}^2}=\frac{15}{38},\ P(H_3)=\frac{C_5^1}{C_{20}^2}=\frac{\dfrac{5!}{3!\cdot 2!}}{\dfrac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{2}{38}.$$

Проверка: $\sum p(H_i)=1$ - выполняется: $\frac{21}{38}+\frac{15}{38}+\frac{2}{38}=1$.

Пусть, событие A = {вторая игра проводится двумя новыми мячами}. Тогда условные вероятности следующие:

$$P(A|H_1)=\frac{C_{13}^2}{C_{20}^2}=\frac{\dfrac{13!}{11!\cdot 2!}}{\dfrac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{39}{95},\ P(A|H_2)=\frac{C_{14}^2}{C_{20}^2}=\frac{\dfrac{14!}{12!\cdot 2!}}{\dfrac{20!}{18!\cdot 2!}}=\frac{91}{190},\ P(A|H_3)=\frac{C_{15}^2}{C_{20}^2}=\frac{21}{38}.$$

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=\frac{21}{38}\cdot\frac{39}{95}+\frac{15}{38}\cdot\frac{91}{190}+\frac{1}{19}\cdot\frac{21}{38}=0{,}4450138.$$

Пример 5. а) На грядке высажено 8 луковиц определенного сорта тюльпанов. Всхожесть луковиц 80%. Какова вероятность, что взойдет не менее 5, но не более 7 растений.

Решение. Событие A = {взойдет отдельный тюльпан}.

Событие B = {взойдет от 5 до 7 растений}.

Пусть событие B_5={взойдет ровно 5 тюльпанов}, событие B_6= {взойдет ровно 6 тюльпанов}, событие B_7 ={взойдет ровно 7 тюльпанов}.

Вероятность события B_k, состоящего в том, что событие A произойдет ровно k раз при n независимых испытаниях, рассчитывается по формуле Бернулли:

$$P(B_k)=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}\quad \text{, где } q=1-p.$$

В частности,

$$P(B_5)=P_8(5)=C_8^5\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)^3=0{,}147,$$

$$P(B_6)=P_8(6)=C_8^6\left(\frac{4}{5}\right)^6\left(\frac{1}{5}\right)^2=0{,}294,$$

$$P(B_7)=P_8(7)=C_8^7\left(\frac{4}{5}\right)^7\left(\frac{1}{5}\right)^1=0{,}335.$$

В данном случае имеем $B=B_5+B_6+B_7$. По теореме сложения для несовместных событий получаем

$$P(B)=P(B_5)+P(B_6)+P(B_7)=0,147+0,294+0,335=0,776.$$

в) Посажено 100 луковиц. Вероятность всхода 80%. Какова вероятность, что взойдут не менее 75, но не более 90.

Решение. Испытания проводятся по схеме Бернулли. Если число испытаний n велико, то используют интегральную теорему Лапласа:

$P_n(k_1 \le k \le k_2)=\Phi(x_2)-\Phi(x_1)$, где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, значение которой берем из таблицы.

$$x_i=\frac{k_i-np}{\sqrt{npq}},\ (i=1,2).$$

По условию $n=100,\ p=0,8,\ q=0,2,\ k_1=75,\ k_2=90$. Следовательно,

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{90-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=\frac{10}{4}=2,5.$$

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=-\frac{5}{4}=-1,25.$$

Имеем:

$P_{100}(75\le k\le 90)=\Phi(2,5)-\Phi(-1,25)=0,4938-(-0,3944)=0,8882.$ (Здесь учтено, что функция Лапласа нечетная $\Phi(-x)=-\Phi(x)$).

Пример 6. Составить закон распределения дискретной случайной величины (ДСВ) X - оценки, полученной на экзамене наугад выбранным студентом. Известно, что в группе из 20 человек 2 студента получили оценку – «2», 6 студентов – «3», 10 студентов – «4» и 2 студента – «5». Построить график функции распределения. Вычислить числовые характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

Решение: ДСВ X - отметка студента, которая может принять значения 2; 3; 4 или 5. Вероятность события $\{X=2\}$ равна $P(X=2)=p_1=2/20$, (число двоек - 2, а общее число студентов 20). Вероятности других возможных значений равны:

$$P(X=3)=p_2=\frac{6}{20},\ P(X=4)=p_3=\frac{10}{20},\ P(X=5)=p_4=\frac{2}{20}.$$

Следовательно, закон распределения ДСВ имеет вид:

X	2	3	4	5
P	0,1	0,3	0,5	0,1

Контроль: 0,1+0,3+0,5+0,1=1

Найдем числовые характеристики данной случайной величины. Математическое ожидание:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}3+4\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}1=0{,}2+0{,}9+2+0{,}5=3{,}6 .$$

Дисперсия:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2\cdot p_i.=(2-3{,}6)^2\cdot 0{,}1+(3-3{,}6)^2\cdot 0{,}3+$$
$$+(4-3{,}6)^2\cdot 0{,}5+(5-3{,}6)^2\cdot 0{,}1=$$
$$=2{,}56\cdot 0{,}1+0{,}36\cdot 0{,}3+0{,}16\cdot 0{,}5+1{,}96\cdot 0{,}1=0{,}64$$

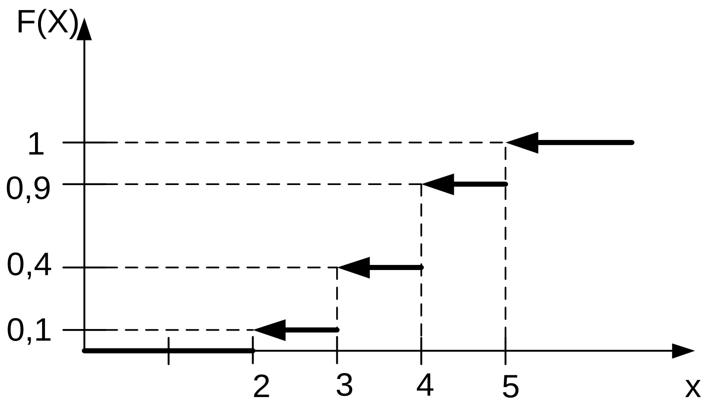
Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}64}=0{,}8.$$

Функция распределения $F(X)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \textit{если } x\le 2 \\ 0{,}1, \textit{если } 2<x\le 3 \\ 0{,}1+0{,}3, \textit{если } 3<x\le 4 \\ 0{,}1+0{,}3+0{,}5, \textit{если } 4<x\le 5 \\ 1, \textit{если } x>5 \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:



Пример 7. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, определяемое плотностью $f(x)=\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}$ при $x\ge 0$, $f(x)=0$ при $x<0$. Найти вероятность того, что за время *t=25* часов элемент не откажет, если известно что $\lambda=0{,}04$.

Решение. X - непрерывная случайная величина-время безотказной работы устройства, которое работает с момента *x=0*, а в момент *x* происходит отказ. Длительность времени безотказной работы имеет показательное распределение с функцией распределения

$$F(x) = P(X < x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t} dt = -e^{-\lambda \cdot t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda \cdot x}.$$

$F(x)$ - это вероятность отказа элемента за время длительностью x.

Вероятность безотказной работы за время длительностью x – это вероятность противоположного события. Эта функция называется *функцией надежности*: $R(t) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda \cdot x}$. Вероятность безотказной работы за *x=t=25* часов равна $R(25) = e^{-0,04 \cdot 25} = e^{-1} \approx 0,358$.

Пример 8. Из группы населения случайным образом отобрано 10 человек и собраны их доходы за истекший год в тысячах рублей x_1, x_2, $x_3 \ldots x_{10}$. Найти выборочное среднее исправленную выборочную дисперсию. Считая распределение доходов в группе нормальным и, применяя в качестве его параметров выборочные характеристики, определить, какой процент населения имеет годовой доход, превышающий 100 тыс. рублей.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
80	110	130	100	70	90	150	60	90	70

Решение.

Найдем выборочную среднюю:

$$\bar{X} = \frac{110 + 130 + 100 + 70 + 90 + 150 + 60 + 80 + 130}{10} = \frac{950}{10} = 95.$$

Вычислим выборочную дисперсию $D_в$.

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - M_в)^2, \; n=10.$$

$$D_в = \frac{1}{10}[(80-95)^2 + (110-95)^2 + (130-95)^2 + (100-95)^2 + (70-95)^2 +$$
$$+(90-95)^2 + (150-95)^2 + (60-95)^2 + (90-95)^2 + (70-95)^2] =$$
$$= \frac{1}{10}[225 + 225 + 1225 + 25 + 625 + 25 + 3025 + 1225 + 25 + 625] = \frac{7250}{10} = 725$$

Исправленная выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{10}{9} \cdot 725 = 805,56.$$

$$\sigma = \sqrt{S^2} = 28,4.$$

Чтобы найти процент группы населения, которая имеет доход, превышающий 100 тыс. руб. используем формулу попадания значений нормально распределенной случайной величины в заданный промежуток:

$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где Φ – функция Лапласа.

В данном случае принимаем следующие значения параметров:

α = 100 тыс.руб., $a = \bar{x} = 95$ тыс.руб., $\sigma = \sqrt{S^2} = S = 28,4$ тыс. руб.,

$\beta \gg 100$ тыс.руб. (нет ограничений сверху). Имеем:

$$P(X > 100) = P(100 < X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty - 95}{28,4}\right) - \Phi\left(\frac{100 - 95}{28,4}\right) = \Phi(\infty) - \Phi\left(\frac{5}{28,4}\right) = 0,5 - \Phi(0,176)$$

По таблице находим: $\Phi(0,176) = 0,07$, следовательно, $P(X > 100) \approx 0,43$.